ensai

deuxième composition de mathématiques

Préambule

1. Sauf mention contraire, n désigne dans tout le problème un entier naturel strictement positif.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{l \in \mathbb{Z}, l \leqslant x\}$ la partie entière de x.

3. $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls. Si I est un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+$, on note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}_I$ le sous-espace constitué des fonctions polynômes, et $\mathscr{P}_I^{(n)}$ le sous-espace de $\mathscr{P}_I$ constitué des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

4. Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, on note $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$ $(\|f\|_I \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$.

5. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

On introduit la fonction $p_{n,k} \in \mathscr{P}_{[0,1]}^{(n)}$ définie par :

$$p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0, 1],$$

et la fonction $T_n \in \mathscr{P}_{[0,1]}$ définie par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 p_{n,k}(x), \qquad x \in [0, 1].$$

6. À toute fonction $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on associe la suite $(B_n[f], n \geqslant 1) \in (\mathscr{P}_{[0,1]})^{\mathbb{N}}$ de ses polynômes de Bernstein, définis par :

$$B_n[f] = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\, p_{n,k}.$$

7. On rappelle la formule de Stirling :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1.$$

8. La partie II peut être traitée en utilisant les résultats de la partie I. Les parties III et IV peuvent être traitées indépendamment.

I. Théorème de Stone-Weierstrass

Dans toute cette partie, f désigne une fonction contenue dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'opérateur :

$$\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_{[0,1]}^{(n)}$$
$$f \longmapsto B_n[f]$$

est un opérateur linéaire.

2. On pose $m = \inf\{f(x), x \in [0, 1]\}$ et $M = \sup\{f(x), x \in [0, 1]\}$. Montrer que $m \leqslant B_n[f] \leqslant M$.

3. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction polynôme élémentaire de degré l définie sur [0, 1] par

$$f_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ x^l & \text{si } l \geqslant 1. \end{cases}$$

a. Calculer $B_n[f_0]$, $B_n[f_1]$ et $B_n[f_2]$.

b. En déduire que $T_n(x) = nx(1-x)$.

4. Pour $\delta > 0$, on pose :

$$S_n^\delta(x) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |(k/n)-x| \geqslant \delta}} p_{n,k}(x), \qquad x \in [0, 1].$$

a. Montrer que $0 \leqslant S_n^\delta \leqslant \dfrac{T_n}{n^2\delta^2}$.

b. En déduire que pour δ fixé, la suite de fonctions $(S_n^\delta, n \geqslant 1)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

5. Montrer que la suite de fonctions $(B_n[f], n \geqslant 1)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
Ind. : on pourra introduire la décomposition :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(k/n)p_{n,k} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |(k/n)-x| \geqslant \delta}} f(k/n)p_{n,k} + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |(k/n)-x| < \delta}} f(k/n)p_{n,k}.$$

6. On note $B_n'[f]$ la dérivée de $B_n[f]$. Montrer que :

$$B_{n+1}'[f] = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \Big(f((k+1)/(n+1)) - f(k/(n+1)) \Big) p_{n,k}.$$

7. On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Montrer que si $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\left| (n+1)\Big(f((k+1)/(n+1)) - f(k/(n+1)) \Big) - f'(k/n) \right| \leqslant \varepsilon.$$

b. Déduire de ce qui précède que la suite de fonctions $(B_n'[f], n \geqslant 1)$ converge uniformément vers f'.

8. Montrer que si f est croissante, alors $B_n[f]$ est croissante.
Montrer que si f est convexe, alors $B_n[f]$ est convexe.

II. Vitesse de convergence de la suite $(B_n[f], n \geqslant 1)$

Dans cette partie f désigne encore une fonction appartenant à $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

A. On introduit le module de continuité ω de f défini par :

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$\delta \longmapsto \sup\{|f(x) - f(y)| ; (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leqslant \delta\}.$$

1. Montrer que pour tout $\delta \geqslant 0$, il existe $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $|x - y| \leqslant \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta)$.

2. Montrer que la fonction ω est continue sur $\mathbb{R}_+$, croissante et bornée.

3. On se fixe $\delta > 0$. Montrer que si $(x, y) \in [0, 1]^2$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(\delta)\left(1 + \frac{|x - y|^2}{\delta^2}\right).$$

4. En déduire que :

$$\|f - B_n[f]\|_{[0,1]} \leqslant \frac{5}{4}\omega(n^{-1/2}).$$

Ind. : on pourra montrer que :

$$|f(x) - B_n[f](x)| \leqslant \omega(\delta)\left(1 + \frac{T_n(x)}{n^2\delta^2}\right), \qquad x \in [0, 1],\ \delta > 0.$$

B. On suppose maintenant que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, et on se fixe un réel $x \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe une fonction :

$$\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto \varepsilon(h)$$

(pouvant dépendre de x) vérifiant $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ telle que :

$$B_n[f](x) = f(x) + \frac{1}{2n^2} f''(x)\, T_n(x) + \sum_{k=0}^{n} (k/n - x)^2\, \varepsilon(k/n - x)\, p_{n,k}(x).$$

2. On note $T_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^m p_{n,k}(x)$.

a. Montrer que pour $m \geqslant 1$, $T_{n,m+1}(x) = x(1 - x)\left(T'_{n,m}(x) + mnT_{n,m-1}(x)\right)$.

b. En déduire que pour tout m il existe une constante c_m telle que $\|T_{n,2m}\|_{[0,1]} \leqslant c_m n^m$.

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\lim_{n \to +\infty} n(f(x) - B_n[f](x)) = -\frac{x(1 - x)}{2} f''(x).$$

C. On suppose dans cette partie que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec convergence absolue de la série $\sum a_k$. On fixe $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

1. Montrer qu'il existe une constante C_1 et une suite de fonctions polynômes $(P_n[f],\ n \geqslant 1)$ telle que $P_n[f] \in \mathscr{P}^{(n)}_{[0,1]}$ et $\|f - P_n[f]\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} \leqslant C_1(1 - \varepsilon)^n$.

2. Montrer que $P_n[f]$ peut s'écrire sour la forme :

$$P_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} x^k (1 - x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

3. On note $\hat{P}_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} E(b_{n,k}) x^k (1 - x)^{n-k}$. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que :

$$\|\hat{P}_n[f] - P_n[f]\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} \leqslant C_2(1 - \varepsilon)^n.$$

En déduire que dans la question C.1., on pouvait supposer $P_n[f]$ à coefficients entiers.

4. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite $(B_n[f],\ n \geqslant 1)$ vers f ?

III. Approximation sur $\mathbb{R}_+$

Dans cette partie, f désigne une fonction appartenant à $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. On fixe deux réels a, b tels que $0 \leqslant a < b$. Que peut-on dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$?

2. Pour $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3$, on note $\alpha_k = \exp\left(i\frac{\pi}{k}\right)$, et on pose :

$$J_n^k = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x^{1/k}\alpha_k)\,dx.$$

a. Calculer J_n^k.

b. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} x^n \sin(x^{1/4}) \exp(-x^{1/4})\,dx$. Que peut-on en conclure ?

3. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) f est limite uniforme sur $\mathbb{R}_+$ d'une suite de fonctions polynômes ;

(ii) f est une fonction polynôme.

IV. Théorème de la limite centrale de Moivre-Laplace

Dans toute cette partie, x désigne un réel fixé de $]0, 1[$, et $y = 1 - x$. Pour n entier strictement positif, on introduit le couple $(m, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ (dépendant de n et de x) tel que $m = nx + \delta$ et $-y < \delta \leqslant x$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n - m$, on pose $u_k = p_{n,k+m}(x)$ et $t_k = \dfrac{k + \delta + y}{(n+1)xy}$.

1. En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$u_0 = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,x^m\,y^{n-m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi nxy}}$$

quand n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que $u_k = u_0 \dfrac{(1-xt_0)(1-xt_1)\ldots(1-xt_{k-1})}{(1+yt_0)(1+yt_1)\ldots(1+yt_{k-1})}$.

3. Montrer que si $|h| < \dfrac{1}{2}$, alors $|\ln(1+h) - h| \leqslant h^2$.

Dans la suite, on suppose que $t_k < \dfrac{1}{2}$.

4. Montrer que $u_k = u_0 \exp(-(t_0 + t_1 + \ldots + t_{k-1}) + \varepsilon_k)$, où $|\varepsilon_k| \leqslant k^3 (nxy)^{-2}$.

5. En déduire que $u_k = u_0 \exp(-k^2 (2nxy)^{-1} + \rho_k)$, où $|\rho_k| \leqslant k^3 (nxy)^{-2} + k(nxy)^{-1}$.

6. En déduire que si $a \leqslant b$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ a\sqrt{nxy} \leqslant k - nx \leqslant b\sqrt{nxy}}} p_{n,k}(x) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail